



1. 分数乘整数

(1) 分数乘整数的意义。

分数乘整数的意义和整数乘法的意义相同,都是求几个相同加数和的简便运算。

例如: $\frac{1}{2} \times 6$ 表示 6 个 $\frac{1}{2}$ 相加的和是多少,也可以表示 $\frac{1}{2}$ 的 6 倍是多少。

(2) 分数乘整数的计算方法。

分母不变,用分子乘整数的积作分子。能约分的可以先约分再计算比较简便。

2. 一个数乘分数

(1) 一个数乘分数的意义。

一个数乘分数就是求一个数的几分之几是多少。这个数可以是整数、小数或分数。

(2) 分数乘分数的计算方法。

分数乘分数,用分子相乘的积作分子,用分母相乘的积作分母,能约分的,要先约分再计算。

(3) 小数乘分数的计算方法。

可以把小数转化成分数再计算,也可以把分数化成小数再计算,还可以先约分再计算。

3. 整数乘法运算定律推广到分数

分数混合运算的顺序和整数混合运算的顺序相同。整数乘法的交换律、结合律和分配律,对于分数乘法也适用。应用乘法的运算定律,可以使一些计算简便。

乘法交换律: $a \times b = b \times a$

乘法结合律: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

乘法分配律: $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

4. 利用分数乘法解决实际问题

(1) 求一个数的几分之几是多少的方法:根据一个数乘分数的意义,用乘法计算。

(2) 稍复杂的求一个数的几分之几是多少的方法:方法一:①确定单位“1”的量;②根据求一个数的几分之几是多少,用乘法先求出中间量;③再根据题意求出所求的量。

方法二:①确定单位“1”的量;②先求出所求问题相当于单位“1”的几分之几;③再根据求一个数的几分之几是多少,用乘法求出答案。

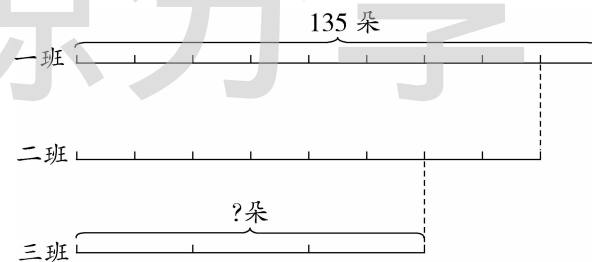


典型例题分析

例 1 六年级同学为国庆晚会做绸花。一班做了 135 朵,二班做的朵数是一班的

$\frac{8}{9}$,三班做的朵数是二班的 $\frac{3}{4}$ 。三班做了多少朵?

分析:画线段图分析:



要求三班做了多少朵,可以先求出二班做了多少朵,即求 135 朵的 $\frac{8}{9}$ 是多少朵,列式为

$$135 \times \frac{8}{9} = 120 \text{ (朵)}; \text{再求出三班做了多少朵,即求 120 朵的 } \frac{3}{4} \text{ 是多少朵,列式为 } 120 \times \frac{3}{4} =$$

90 (朵)。也可以这样想:三班做的朵数是一班做的朵数的 $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$,列式为 $135 \times \frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$ 。

$$\text{解答: } 135 \times \frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$$

$$= 135 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$= 90 \text{ (朵)}$$

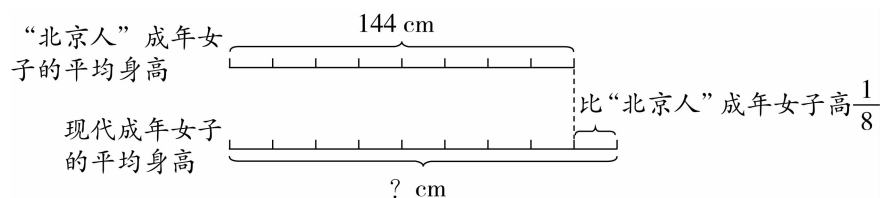
答:三班做了 90 朵。

例 2 “北京人”大约在 70 万年前生活在北京市周口店。“北京人”成年女子的平均

身高只有 144 cm,现代成年女子的平均身高比“北京人”成年女子高 $\frac{1}{8}$ 。现代成年女子

的平均身高是多少厘米?

分析:画线段图分析:



从图中可以看出,现代成年女子的平均身高比“北京人”成年女子高 $\frac{1}{8}$,是把“北京人”成年女子的平均身高看作单位“1”,求现代成年女子平均身高比“北京人”成年女子高多少,就是求144 cm的 $\frac{1}{8}$,列式为 $144 \times \frac{1}{8}$ 。用“北京人”成年女子的平均身高加上现代成年女子平均身高比“北京人”成年女子高的量,就是现代成年女子的平均身高,列式为 $144 + 144 \times \frac{1}{8}$ 。还可以先求出现代成年女子的平均身高是“北京人”成年女子平均身高的几分之几,列式为 $1 + \frac{1}{8}$,求现代成年女子的平均身高,就是求144 cm的 $(1 + \frac{1}{8})$,列式为 $144 \times (1 + \frac{1}{8})$ 。

$$\begin{aligned} \text{解答:方法一: } 144 + 144 \times \frac{1}{8} & \quad \text{方法二: } 144 \times (1 + \frac{1}{8}) \\ & = 144 + 18 & = 144 \times \frac{9}{8} \\ & = 162(\text{cm}) & = 162(\text{cm}) \end{aligned}$$

答:现代成年女子的平均身高是162 cm。



错例1 一根铁丝长 $\frac{4}{5}$ m,如果用去 $\frac{1}{4}$,还剩()m,如果用去 $\frac{1}{4}$ m,还剩()m。

错误解答: $\frac{11}{20}$ $\frac{11}{20}$

错解分析:本题没有正确区分“用去 $\frac{1}{4}$ ”和“用去 $\frac{1}{4}$ m”的含义。把 $\frac{4}{5}$ m看作单位“1”,用去 $\frac{1}{4}$,剩下的占原来的 $(1 - \frac{1}{4})$,根据一个数乘分数的意义,用乘法计算;用去

$\frac{1}{4}$ m指的是一个具体的长度,计算时用减法计算。

正确解答: $\frac{3}{5}$ $\frac{11}{20}$

(对应训练参见学生用书第一周复习第三题第2小题内容)

错例2 判断:一筐苹果比一筐梨重 $\frac{1}{5}$,那么一筐梨就比一筐苹果轻 $\frac{1}{5}$ 。()

错误解答:✓

错解分析:本题错在没有理解单位“1”和几分之几之间的关系。苹果比梨重 $\frac{1}{5}$,表

示苹果比梨重的部分占梨的总质量的 $\frac{1}{5}$,把梨的质量看作单位“1”;而梨比苹果轻 $\frac{1}{5}$ 则

表示梨比苹果轻的部分占苹果总质量的 $\frac{1}{5}$,把苹果的质量看作单位“1”。两个单位“1”

不同,不能混为一谈。一筐苹果比一筐梨重 $\frac{1}{5}$,是把梨看作单位“1”,假设梨有5份,那

么苹果就有 $5 \times (1 + \frac{1}{5}) = 6$ (份),一筐梨比一筐苹果轻 $(6 - 5) \div 6 = \frac{1}{6}$ 。

正确解答:×

(对应训练参见学生用书第三周复习第二题第3小题内容)

错例3 一个书包原价250元,商店先提价 $\frac{1}{10}$,又降价 $\frac{1}{10}$,现价是多少元?

错误解答: $250 \times (1 + \frac{1}{10}) \times \frac{1}{10} = 27.5$ (元) 答:现价是27.5元。

错解分析:本题错在没有把握准单位“1”的量。把商品原价看作单位“1”,提价 $\frac{1}{10}$ 就

是说提价后的价格是原价的 $(1 + \frac{1}{10})$,又降价 $\frac{1}{10}$ 就是把提价后的价格看作单位“1”,即现

价是提价后价格的 $(1 - \frac{1}{10})$,提价和降价对应的单位“1”的量有变化,所以现价占原价的

$(1 + \frac{1}{10}) \times (1 - \frac{1}{10})$,最后根据分数乘法的意义计算即可。

正确解答: $250 \times (1 + \frac{1}{10}) \times (1 - \frac{1}{10}) = 247.5$ (元) 答:现价是247.5元。

(对应训练参见学生用书第三周复习第三题第2小题内容)



1. 根据方向和距离确定物体的位置

(1) 知道方向和距离这两个条件可以确定物体的具体位置。

(2) 确定物体位置的步骤。

要确定一个物体的位置,有三个步骤:定参照点,量方向,算距离。确定方向时,如果量北偏东的角,就以北为 0° 刻度开始量,如果量东偏北,就以东为 0° 刻度开始量;确定距离时,先要观察图中 1 cm 表示的实际距离是多少,然后测量图中物体距离参照点有多少厘米,再算出实际距离。另外,东偏南 30° 也可以说成南偏东 60° ,只是平时人们习惯选择小于 45° 的角度进行描述。

(3) 物体的位置是相对的,观测点不同,描述的方向也不同。当观测点和被观测点相互调换,描述这两点的位置关系时,方向正好相反,角度、距离不变。

2. 根据方向和距离在图上标出物体的位置

根据方向和距离在图上标出物体的位置的步骤:①根据描述找出参照点;②根据条件中的方向确定 0° 刻度线,测量出角度;③根据图中的单位长度标准,算出物体和参照点之间有几段这样的长度,并在对应方向上画出来;④标出名称。

3. 描述并绘制路线图

(1) 描述路线图。

从一处到另一处所经过的道路叫作路线。把所经过的路线上的一系列的点按实际形状绘制成图,就是路线图。

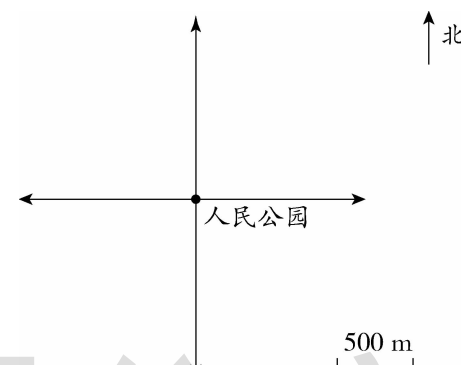
观察并描述路线图:看清路线图的方向,根据图中的单位长度标准和物体与参照点之间有几段这样的长度得出相应的实际距离,描述简单的路线图时,要先明确行走方向,确定角度和距离,再用“先向……再向……最后向……”描述出来。

(2) 绘制路线图。

绘制路线图的方法:找准参照点,画出十字方向标,然后根据描述中的方向和距离确定位置,并标出来。

典型例题分析

例 1 根据下面两位同学的描述,在平面图上标出各同学家所在的位置。

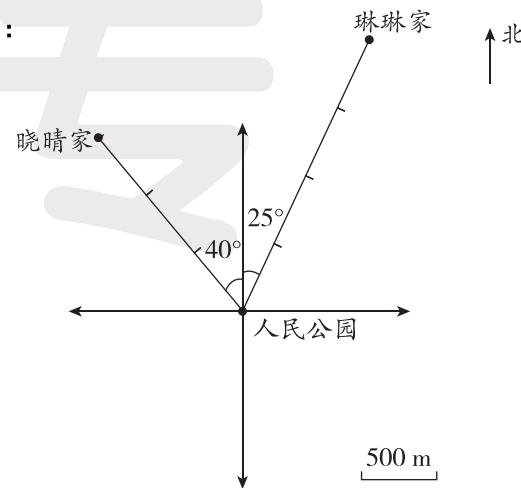


1. 晓晴说:“我家在人民公园的北偏西 40° 方向 1500 m 处。”

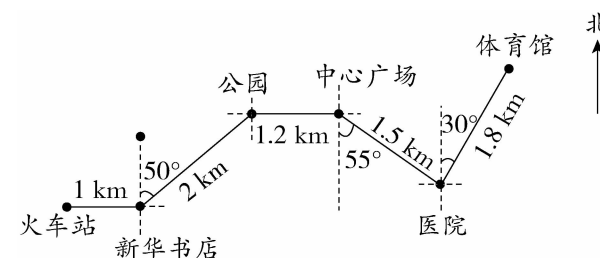
2. 琳琳说:“我家在人民公园的北偏东 25° 方向 2000 m 处。”

分析:晓晴家在人民公园的北偏西 40° 方向 1500 m 处,“北偏西 40° ”表示的是方向,基本方向是“北”,然后偏西 40° ,可以用量角器的中心对准人民公园所对应的点, 0° 刻度线对准北方,然后画出一个 40° 的角;从图上可知,图中 1 cm 表示实际距离 500 m , 1500 m 在图上可以用 3 cm 表示,在 40° 角上从人民公园开始截取 3 cm 长的线段,线段的另一个端点就是晓晴家。琳琳家在人民公园北偏东 25° 方向 2000 m 处,在地图上画出北偏东 25° 的角,从人民公园开始截取 4 cm 长的线段,线段的另一个端点就是琳琳家。

解答:



例 2 下面是某市 302 路公共汽车的行车路线图。



说说302路公共汽车从火车站到体育馆的行车路线。

分析:叙述行车路线要说明行车的方向和距离。公共汽车从火车站出发,向东行1 km到新华书店;从新华书店出发,图中标出了一个角度是 50° ,观察这个角度的基本方向是北,然后向东偏 50° ,所以从新华书店出发向北偏东 50° 也就是东偏北 40° 方向行2 km到公园;然后继续按照这个方法确定行车的路线。

解答:302路公共汽车从火车站出发,向东行1 km到新华书店;从新华书店向东偏北 40° 方向行2 km到公园;从公园向东行1.2 km到中心广场;从中心广场向东偏南 35° 方向行1.5 km到医院;从医院向北偏东 30° 方向行1.8 km到体育馆。



错例1 红红面向北站立,向右转 40° 后所面对的方向是()。

- A. 北偏东 40° B. 北偏西 40° C. 南偏东 40° D. 东偏南 40°

错误解答:B

错解分析:本题没有将方向的规定与实际生活结合起来。根据方向的规定上北下南,左西右东及本题实际可知,红红面向北站立,那么红红的右边是东,左边是西,后面是南,所以红红向右转 40° 所面对的方向是北偏东 40° 。

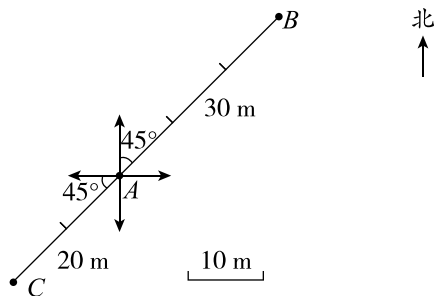
正确解答:A

(对应训练参见学生用书第二单元测试第一题第1小题内容)

错例2 小明从A点出发向北偏东 45° 方向走了30 m,到达B点,小东从A点出发向西偏南 45° 方向走了20 m,到达C点,那么B、C两点之间的距离是()m。

错误解答:10

错解分析:本题错在没有明确B、C两点所在位置。由下图可知,北偏东 45° 方向与西偏南 45° 方向成一条直线,小明和小东都是从A点出发,但所走的方向正好相反,在一条直线上,他们二人所走的距离和就是B、C两点之间的距离。



正确解答:50

(对应训练参见学生用书第二单元测试第一题第2小题内容)

考前
梳理

第三单元 分数除法



1. 倒数

(1)倒数的意义。

乘积是1的两个数互为倒数。1的倒数是1,0没有倒数。

(2)求一个数的倒数的方法。

①求一个整数(0除外)的倒数,直接写成这个整数分之一即可。例如:8的倒数是 $\frac{1}{8}$ 。

②求一个分数的倒数,就是把这个分数的分子和分母互换位置。例如: $\frac{7}{9}$ 的倒数是 $\frac{9}{7}$ 。

③求一个带分数的倒数,要先把其转化成假分数再将分子与分母的位置互换。

例如:求 $1\frac{1}{5}$ 的倒数,因为 $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$,所以它的倒数是 $\frac{5}{6}$ 。

④求一个小数的倒数,要先把其转化成分数再求倒数。例如:求0.5的倒数,因为 $0.5 = \frac{1}{2}$,所以它的倒数是2。

⑤分子是1的分数的倒数是整数。

2. 分数除法

(1)分数除法的意义。

分数除法的意义与整数除法的意义相同,都表示已知两个因数的积与其中一个因数,求另一个因数的运算。

(2)分数除法的计算方法。

分数除法的计算方法:除以一个不等于0的数,等于乘这个数的倒数。也就是把除法转化为乘法来计算,转化的要点是“一抄二变三计算”,即:第一步,被除数不变,照抄下来(一抄);第二步,除号变乘号,除数变成它的倒数(二变);第三步,进行计算(三算)。

(3)分数除法中商与被除数的关系。

①一个数(0除外)除以大于1的分数,商小于被除数。例如: $8 \div \frac{8}{7} = 7, 7 < 8$ 。

②一个数(0除外)除以等于1的分数,商等于被除数。例如: $\frac{1}{5} \div 1 = \frac{1}{5}$ 。

③一个数(0除外)除以小于1的分数,商大于被除数。例如: $\frac{1}{5} \div \frac{1}{5} = 1, 1 > \frac{1}{5}$ 。

(4)分数四则混合运算。

分数四则混合运算的顺序和整数四则混合运算的顺序一样。

(5)利用分数除法解决实际问题。

①已知一个数的几分之几是多少,求这个数。

这类题目中单位“1”的量都是未知的,所以可以根据关系式“单位‘1’的量 \times 已知量占单位‘1’的几分之几=已知量”设单位“1”的量为 x ,用方程解答,也可以根据关系式“已知量 \div 已知量占单位‘1’的几分之几=单位‘1’的量”用除法直接计算。

②已知一个数比另一个数多(少)几分之几,求另一个数。

这类题目中一般把“比”后面的量看作单位“1”,然后根据关系式“一个数 \div ($1\pm$ 几分之几)=另一个数”直接计算,也可以设单位“1”的量为 x ,然后根据关系式“另一个数 \times ($1\pm$ 几分之几)=这个数”列方程求解。

③和倍、差倍问题。

已知两个数量的和(或差)以及两个数量之间的倍比关系,求这两个数,叫作和(差)倍问题。解答此类问题时,首先应找准题目中的等量关系,设其中一个量为 x ,然后利用两种量之间的关系表示出另一个量,最后根据等量关系式列方程求解。

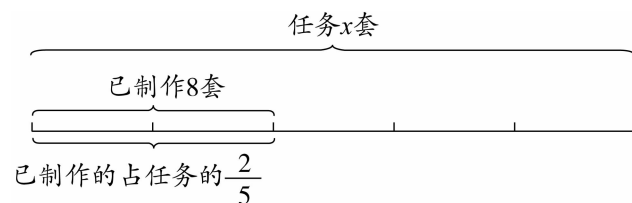
④工程问题。

工程问题一般不给出工作总量的具体数量,只说是“一项工程”“一件工作”等。解答时,要把工作总量看作单位“1”,工作效率用分数表示,它表示单位时间内能完成工作总量的几分之一或几分之几。工程问题的基本数量关系是工作效率 \times 工作时间=工作总量、工作总量 \div 工作效率=工作时间、工作总量 \div 工作时间=工作效率。合作情况的数量关系是工效和 \times 合作时间=工作总量、工作总量 \div 工效和=合作时间、工作总量 \div 合作时间=工效和、工效和=甲工效+乙工效。

典型例题分析

例1 王师傅接到制作一批课桌椅的任务,第一天制作了8套课桌椅,完成了任务的 $\frac{2}{5}$,这项任务要制作多少套课桌椅?

分析:可以画图分析:



从图中可以看出,把任务的总套数看作单位“1”,已制作的占任务的 $\frac{2}{5}$,因此可以得

到数量关系:任务总套数 $\times \frac{2}{5}$ =已制作的套数。我们可以设任务总套数为 x ,列出方程:

$x \times \frac{2}{5} = 8$,根据方程的性质,两边同时除以 $\frac{2}{5}$ 可以求出方程的解。

解答:解:设这项任务要制作 x 套课桌椅。

$$x \times \frac{2}{5} = 8$$

$$x = 20$$

答:这项任务要制作20套课桌椅。

例2 水果店运来香蕉和苹果共180 kg,其中运来香蕉的质量是苹果的 $\frac{4}{5}$,香蕉和苹果各运来多少千克?

分析:由“运来香蕉的质量是苹果的 $\frac{4}{5}$ ”可知,把苹果的质量看作单位“1”,设为 x kg,香蕉的质量为 $\frac{4}{5}x$ kg。根据“香蕉和苹果共180 kg”可列出方程解答。

解答:解:设苹果运来 x kg,香蕉运来 $\frac{4}{5}x$ kg。

$$x + \frac{4}{5}x = 180$$

$$x = 100$$

$$\text{香蕉: } 100 \times \frac{4}{5} = 80 (\text{kg})$$

答:香蕉运来80 kg,苹果运来100 kg。

容错展板

错例 一项工程,甲单独做20天完成,乙单独做30天完成,甲、乙合作,几天后,乙有事请假,甲继续做,从开始到完工一共用了16天,乙请假几天?

错误解答: $16 - \left[1 \div \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) \right] = 4$ (天) 答:乙请假4天。

错解分析:本题错在没有明确单位“1”和乙未干工作量之间的关系。根据题意,把总工作量看作单位“1”,甲和乙的工作效率分别是 $\frac{1}{20}$ 、 $\frac{1}{30}$,他们的工作效率和是 $\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right)$,根据从开始到完工一共用了16天,可求出甲、乙合作16天的工作量和是 $\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) \times 16$,但是乙有事请假没有干够16天,所以甲、乙合作16天的工作量和大于总工作量,用16天的工作量和减去总工作量就是乙未干的工作量,然后利用工作时间=工作量 \div 工作效率,即可求出乙请假天数。

正确解答: $\left[\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) \times 16 - 1 \right] \div \frac{1}{30} = 10$ (天) 答:乙请假10天。

(对应训练参见学生用书第七周复习第二题第4小题内容)



1. 比的认识

两个数的比表示两个数相除。“:”叫作比号,读作“比”。在两个数的比中,比号前面的数叫作比的前项,比号后面的数叫作比的后项。比的前项除以比的后项所得的商,叫作比值。例如: $a:b=\frac{a}{b}$ (b 不为0)。 a 是比的前项, b 是比的后项, $\frac{a}{b}$ 是比值,比值通常用分数表示,也可以用整数或小数表示。

2. 比与分数和除法的关系

比的前项相当于分数的分子,相当于除法的被除数;比的后项相当于分数的分母,相当于除法的除数;比值相当于分数的分数值,相当于除法的商。

除法中的除数不能为0,分数中的分母不能为0,所以比的后项不能为0。

3. 比的基本性质

分数有基本性质,除法有商不变的性质,根据比和分数、除法的关系,比的前项和后项同时乘或除以相同的数(0除外),比值不变,这叫作比的基本性质。

4. 求比值与化简比

(1)意义。

①求比值:求出比的值的大小。

②化简比:把一个比化成最简单的整数比(前项和后项互质)的形式。

(2)依据。

①求比值:根据比的意义,用比的前项除以后项。

②化简比:根据比的基本性质,把比的前项和后项同时乘或除以同一个不为0的数,使比的前项和后项互质。

(3)方法。

①求比值:用比的前项除以后项。例如:求0.5:2的比值, $0.5\div 2=0.25$ 。

②化简比。

整数比:用比的前、后项同时除以它们的最大公因数。

分数比:把比的前、后项同时乘它们分母的最小公倍数,去掉分母,变成整数比,再按

照整数比的化简方法化成最简单的整数比。

小数比:把小数比化成整数比,再按照整数比的化简方法化成最简单的整数比。

(4)区别。

比值是一个数,而化简比后仍然是一个比,只是比的前项和后项是互质的整数。

5. 按比分配

按比分配就是把一个量按照一定的比进行分配。混合物质的总份数是几种物质份数的总和,利用每种物质占总份数的几分之几来求每种物质的具体含量。



典型例题分析

例1 当 $\frac{3}{5}:4=x:5$ 时, $x=(\quad)$ 。

分析:通过观察可知两个比的比值相等,所以先求出 $\frac{3}{5}:4=\frac{3}{5}\div 4=\frac{3}{20}$,然后再根据

$x:5=x\div 5=\frac{3}{20}$ 求出 x 即可。

解答: $\frac{3}{4}$

例2 化简比并求比值。

$8:10$ $\frac{1}{2}:7$ $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$ $3:0.25$ $0.72:0.36$

分析:化简8:10,根据比的基本性质,前项和后项同时除以它们的最大公因数2,可以得到4:5;化简 $\frac{1}{2}:7$,前项是分数,后项是整数,因为分数乘分母可以变成整数,因此前

项、后项同时乘2,可得到1:14;化简 $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$,可以让前项和后项同时乘分母的最小公倍数

6,可以得到 $(\frac{5}{6}\times 6):(\frac{2}{3}\times 6)=5:4$;化简3:0.25,后项是两位小数,化简时先把小数变成

整数,0.25变成25,扩大到原来的100倍,要使比值不变,前项也扩大到原来的100倍,可以得到300:25=12:1;化简0.72:0.36,前项和后项都是小数,可以同时乘100,得到72:36=2:1。把比化成最简单的整数比后,把比写成分数的形式就是它们的比值。

解答: $8:10=4:5=\frac{4}{5}$ $\frac{1}{2}:7=1:14=\frac{1}{14}$ $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=(\frac{5}{6}\times 6):(\frac{2}{3}\times 6)=5:4=\frac{5}{4}$

$3:0.25=300:25=12:1=12$ $0.72:0.36=72:36=2:1=2$

例3 一块合金含铜与锌的比是3:4(只含铜锌),用此合金制成铜与锌之比为1:2的新合金378 g,只需添加一种金属,是哪种金属?添加多少克?

分析:由题意知,原来合金中铜与锌的比是3:4,新合金中铜与锌的比是1:2,由此得出新合金中需要添加锌;然后根据新合金中铜与锌的比,得出铜占总质量的几分之几,再用分数乘法求出铜的质量,接着根据原来合金中铜与锌的比,用分数除法求出原来合金的质量,最后用新合金的质量减原来合金的质量,求出添加的锌的质量。

解答:原来合金中铜占: $\frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$;锌占: $\frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$;新合金中铜占: $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$;锌占:

$\frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$;因为 $\frac{4}{7} < \frac{2}{3}$,所以添加的金属是锌。

$378 - 378 \times \frac{1}{3} \div \frac{3}{7} = 84(\text{g})$

答:需要添加金属锌84 g。

容错展板

错例 两个相同的瓶子装满酒精溶液,一个瓶子中酒精与水的体积之比是3:1,另一个瓶子中酒精与水的体积之比是4:1,若把两瓶酒精溶液混合,混合后酒精与水的体积之比是多少?

错误解答: $(3+4):(1+1) = 7:2$ 答:混合后酒精与水的体积之比是7:2。

错解分析:本题错误地理解了比的含义。由题意知,把两瓶酒精溶液混合后,酒精与水的体积之和没变,所以将酒精瓶的容积看作单位“1”,分别求出每瓶中酒精和水各占酒精瓶容积的几分之几,然后再求混合溶液中酒精与水的体积之比是多少。

正确解答:一个瓶子中:酒精占 $\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$,水占 $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$;

另一个瓶子中:酒精占 $\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$,水占 $\frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$;

混合溶液中酒精和水的体积之比为 $(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}) : (\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = 31:9$ 。

答:混合后酒精与水的体积之比是31:9。

(对应训练参见学生用书第四单元测试第二题第5小题内容)

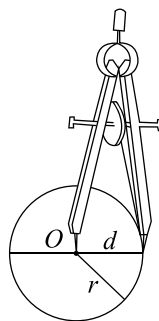
考前梳理 第五单元 圆

复习驿站

1. 圆的认识

(1)圆是由一条曲线围成的封闭图形。

(2)如右图,用圆规画圆时,针尖所在的点叫作圆心,一般用字母 O 表示。连接圆心和圆上任意一点的线段叫作半径,一般用字母 r 表示,半径的长度就是圆规两个脚之间的距离。通过圆心并且两端都在圆上的线段叫作直径,一般用字母 d 表示。 $d = 2r$ 或 $r = \frac{1}{2}d$ 。



(3)圆有无数条直径,有无数条半径,同圆或等圆中,所有半径都相等,所有直径也都相等。圆心决定圆的位置,半径决定圆的大小。

(4)圆的对称性:圆是轴对称图形,直径所在的直线是圆的对称轴,圆有无数条对称轴。

2. 圆的周长

(1)圆周率:任意一个圆的周长与它的直径的比值是一个固定的数,我们把它叫作圆周率,用字母 π 表示。它是一个无限不循环小数, $\pi \approx 3.1415926535 \dots$ 但在实际应用中常常只取它的近似值,例如: $\pi \approx 3.14$ 。

(2)圆的周长与它的直径有关,圆的直径越大,周长越长。

(3)圆的周长 = 直径 \times 圆周率或圆的周长 = $2 \times$ 半径 \times 圆周率,用字母表示为: $C = \pi d$ 或 $C = 2\pi r$ 。

3. 圆的面积

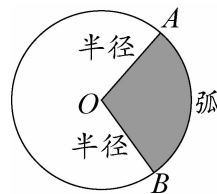
(1)圆的面积计算公式及推导过程:把圆平均分成若干份,可以拼成一个近似的长方形,且圆的面积等于拼成的长方形的面积,长方形的长相当于圆的周长的一半,宽相当于圆的半径。根据“长方形面积 = 长 \times 宽”可得出圆的面积 = $\frac{1}{2} \times$ 圆的周长 \times 半径,用字母表示为: $S = \pi r^2$ 。

(2)圆环的面积计算公式: $S = (R^2 - r^2)\pi$ 。

4. 扇形

(1)弧:如右图,圆上 A 、 B 两点之间的部分叫作弧。

(2)扇形:一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形叫作扇形。



(3)圆心角:像 $\angle AOB$ 这样,顶点在圆心的角叫作圆心角。在同一个圆中,扇形的大小与这个扇形的圆心角的大小有关。



典型例题分析

例1 若一根10 m长的绳子,在一棵大树的树干上绕了3圈后还剩0.58 m,这棵大树的树干横截面的直径是多少米?

分析:绕了3圈后还剩0.58 m,说明绕树干3圈的长度是 $10 - 0.58 = 9.42(\text{m})$,可求出1圈的长度为 $9.42 \div 3 = 3.14(\text{m})$,即树干的横截面的周长是3.14 m,再根据 $d = C \div \pi$ 可求出它的直径。

解答: $10 - 0.58 = 9.42(\text{m})$

$9.42 \div 3 = 3.14(\text{m})$

$3.14 \div 3.14 = 1(\text{m})$

答:这棵大树的树干横截面的直径是1 m。

例2 校园里修建了一个周长是37.68 m的圆形花坛,现在要在花坛周围修一条宽为1 m的大理石小路。这条小路的面积是多少?

分析:由题目可知求小路的面积就是求圆环的面积。花坛周围修小路,说明花坛是内圆,已知周长,可求出它的半径为 $37.68 \div 3.14 \div 2 = 6(\text{m})$,再由小路的宽为1 m可知外圆的半径为 $6 + 1 = 7(\text{m})$,再根据圆环的面积公式求小路的面积。

解答: $37.68 \div 3.14 \div 2 = 6(\text{m})$ $6 + 1 = 7(\text{m})$

$3.14 \times (7^2 - 6^2) = 40.82(\text{m}^2)$

答:这条小路的面积是 40.82 m^2 。



错例1 在一张长9 cm、宽6 cm的长方形纸上画一个圆,则圆规两脚间的距离不能超过()cm。

A. 3 B. 6 C. 9

错误解答:B

错解分析:本题错把圆规两脚间的距离认为是圆的直径。由题意知,长方形内最大的圆是以长方形的宽为直径的圆,圆规两脚间的距离是圆的半径,所以在这张长方形纸上画圆,圆规两脚间的距离不能超过 $6 \div 2 = 3(\text{cm})$ 。

正确解答:A

(对应训练参见学生用书第九周复习第一题第8小题内容)

错例2 一个圆的直径是4 cm,如果直径增加2 cm,则圆的周长增加()cm,面积增加() cm^2 。

错误解答:6.28 3.14

错解分析:本题错在计算增加的面积时,原来的直径没有参与计算。一个圆,如果直径 d 增加 n ,那么周长增加 $\pi \times (d + n) - \pi d = n\pi$,也就是说圆的周长增加的值与圆原来的直径大小无关,但是圆的面积不一样,应该用增加后的面积减去增加前的面积。所以这个圆的周长增加: $2 \times 3.14 = 6.28(\text{cm})$,面积增加: $3.14 \times [(4 + 2) \div 2]^2 - 3.14 \times (4 \div 2)^2 = 15.7(\text{cm}^2)$ 。

正确解答:6.28 15.7

(对应训练参见学生用书第十一周复习第三题第5小题内容)



第六单元 百分数(一)



1. 百分数

(1)百分数的意义:百分数是表示一个数是另一个数的百分之几的数,百分数也叫百分比或百分率。

(2)百分数的读写法:百分数的读法与分数的读法相同,先读分母,再读分子。写百分数时,先写分子,再写百分号。

(3)百分数与分数的区别与联系:表示一个数是另一个数的百分之几的数叫作百分数。它只表示两个数之间的倍比关系,所以百分数后面不带单位。而把单位“1”平均分成若干份,表示这样的一份或几份的数叫作分数。分数既可以表示两数之间的倍比关系,也可以表示一个具体数量。当分数和百分数都用来表示两数之间的倍比关系时,两种数可以互化。

2. 百分数和分数、小数的互化

(1)小数化成百分数的方法:先把小数点向右移动两位,再添上百分号。

(2)百分数化成小数的方法:去掉百分号,同时把小数点向左移动两位。

(3)分数化成百分数的方法:先把分数化成小数(除不尽的,通常保留三位小数),再化成百分数。

(4)百分数化成分数的方法:先改写成分子是100的分数,能约分的约成最简分数。

3. 百分数的应用

(1)求一个数是另一个数的百分之几的问题:求一个数是另一个数的百分之几的解法与求一个数是另一个数的几倍或几分之几的解法一样,都是用一个数 \div 另一个数,不同之处在于结果要化成百分数。

(2)求常见的百分率。

常见百分率的计算公式:合格率 = $\frac{\text{合格数量}}{\text{总数量}} \times 100\%$

出勤率 = $\frac{\text{出勤人数}}{\text{总人数}} \times 100\%$ 发芽率 = $\frac{\text{发芽种子数}}{\text{试验种子总数}} \times 100\%$

出粉率 = $\frac{\text{面粉的质量}}{\text{小麦的质量}} \times 100\%$ 成活率 = $\frac{\text{成活棵数}}{\text{种植总棵数}} \times 100\%$

出油率 = $\frac{\text{油的质量}}{\text{原料的质量}} \times 100\%$ 命中率 = $\frac{\text{命中次数}}{\text{总次数}} \times 100\%$

(3)“求一个数的百分之几是多少”的问题、“已知一个数的百分之几是多少,求这个数”的问题和分数同类题的解答方法一样。

(4)生活中求增加百分之几、减少百分之几、节约百分之几,增加、减少的幅度,就是求一个数比另一个数多或少百分之几,用除法计算,用“相差的量 \div 单位‘1’”。当没有已知的具体数量时,可以用假设法解答。



典型例题分析

例1 王老师经过锻炼,体重下降到60 kg,比去年减少了15 kg,他的体重下降了百分之几?

分析:求体重下降了百分之几,关键是看哪个数量是哪个数量的百分之几。王老师的体重今年比去年下降了,是把去年的体重看作单位“1”,求下降的体重是去年体重的百分之几,应该用下降的体重除以去年的体重。从题中可以知道,王老师去年的体重是 $60 + 15 = 75(\text{kg})$ 。

解答: $15 \div (60 + 15) = 20\%$

答:他的体重下降了20%。

例2 丫丫书店同时卖出两本书,每本各12元,其中一本赚20%,另一本亏20%。

丫丫书店卖出这两本书是亏本了还是赚钱了?

分析:判断亏本或是赚钱,就要把售价和进价进行比较。两本书都卖了12元,那么两本书的售价和就是 $12 \times 2 = 24(\text{元})$ 。第一本赚了20%,是赚了第一本进价的20%,所以第一本的进价 $\times (1 + 20\%) = 12(\text{元})$,列方程求出第一本的进价;第二本亏本20%,是亏了第二本进价的20%,所以第二本的进价 $\times (1 - 20\%) = 12(\text{元})$,列方程求出第二本的进价。最后把两本书的进价相加,同两本书的售价和24元进行比较,就能知道是亏本还是赚钱。

解答:解:设第一本的进价是 x 元。

$$\begin{aligned} x \times (1 + 20\%) &= 12 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

解:设第二本的进价是 y 元。

$$\begin{aligned} y \times (1 - 20\%) &= 12 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

$$10 + 15 = 25(\text{元}) \quad 12 \times 2 = 24(\text{元}) \quad 25 > 24$$

答:丫丫书店卖出这两本书亏本了。



错例

一个小数,将它的小数点向右移动一位,同时添上一个“%”,得到的这个数与原数相比,()。

A. 扩大到原来的10倍 B. 缩小到原来的 $\frac{1}{10}$ C. 大小不变

错误解答:A

错解分析:一个小数,将它的小数点向右移动一位,这个数就扩大到原来的10倍,再根据“不是0的数后面添上百分号,这个数就缩小到原来的 $\frac{1}{100}$ ”可知,这个数是先扩大到原来的10倍,再缩小到原来的 $\frac{1}{100}$,最终得到的数是缩小到原来的 $\frac{1}{10}$ 。

正确解答:B

(对应训练参见学生用书第十二周复习第一题第9小题内容)



1. 扇形统计图

扇形统计图:用整个圆表示一个整体,用圆内各个扇形面积的大小表示各部分数量占总数的百分比。

扇形统计图中,各部分数量占总数的百分比的和应是 100%。

2. 统计图的选择

条形统计图的优点:能清楚地看出数量的多少。

折线统计图的优点:不仅可以看出数量的多少,而且可以看出数量的增减变化情况。

扇形统计图的优点:能清楚地反映出各部分数量与总数之间的关系。

在统计的时候,一定要根据统计内容的需要选择合适的一种或两种统计图。

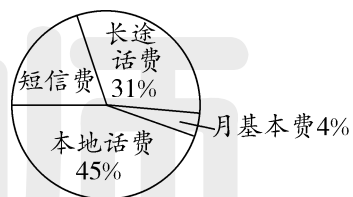
典型例题分析

例 1 王叔叔上个月手机费用是 75 元,右边是各项手机费用支出情况,请你根据统计图回答问题。

(1)王叔叔上个月手机费用中,哪项支出最少? 是多少元?

(2)王叔叔上个月的长途话费是多少元?

(3)短信费占上个月手机费用的百分之几? 是多少元?



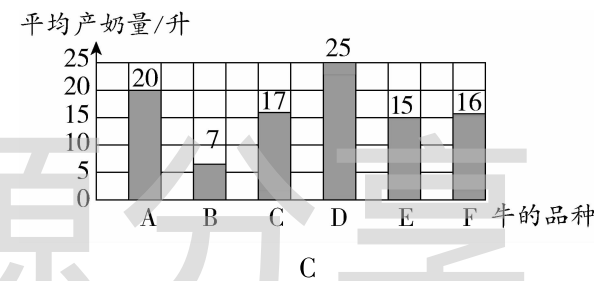
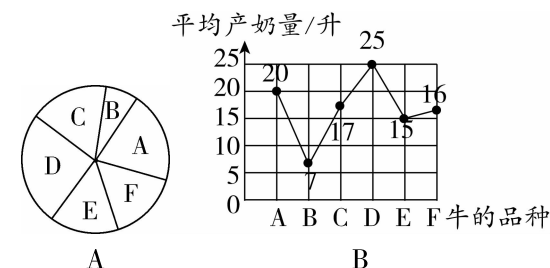
分析:(1)扇形统计图中,哪个扇形的面积大,这个扇形占总体的百分比就大;哪个扇形的面积小,这个扇形占总体的百分比就小。这个统计图中月基本费的面积最小,月基本费的支出最少,占总费用的 4%,求月基本费是多少就是求 75 元的 4% 是多少,列式为 $75 \times 4\%$ 。(2)长途话费占总费用的 31%,求长途话费是多少元,就是求 75 元的 31% 是多少,列式为 $75 \times 31\%$ 。(3)这个扇形统计图是用整个圆代表总费用,也就是把总费用看作单位“1”,减去除短信费的其他费用所占的百分比,就是短信费占总费用的百分比,列式计算为 $1 - 31\% - 4\% - 45\% = 20\%$ 。求短信费是多少元,就是求 75 元的 20% 是多少,列式为 $75 \times 20\%$ 。

解答:(1)月基本费 $75 \times 4\% = 3$ (元)

(2) $75 \times 31\% = 23.25$ (元)

(3) $1 - 31\% - 4\% - 45\% = 20\%$ $75 \times 20\% = 15$ (元)

例 2 下面三个统计图中,用来表示不同品种的牛的平均产奶量最为合适的是()。



分析:表示不同品种的牛的平均产奶量,就是要表示出各种数量的多少,根据三种统计图各自不同的特点,应采用条形统计图。

解答:C



错题 1 笑笑要统计自己本学期五次测验成绩的变化情况,她应选择()统计图。

A. 条形 B. 扇形 C. 折线

错误解答:A

错解分析:本题对各类统计图的特点理解错误。条形统计图能清楚地表示出数量的多少;折线统计图不但可以表示出数量的多少,而且能看出各种数量的增减变化情况;扇形统计图能比较清楚地反映出部分与部分、部分与整体之间的数量关系。本题中要统计五次测验成绩的变化情况,所以要选择折线统计图。

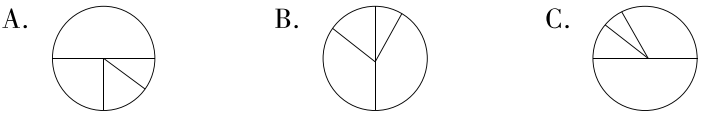
正确解答:C

(对应训练参见学生用书第七单元测试第一题第 1 小题内容)

错题 2 在一个有 60 名工人的车间中投票选举优秀员工,投票结果如下:

张强	王梅	刘云	赵青青
30	15	6	9

下面哪幅图正确显示了得票结果? ()



错误解答:C

错解分析:本题对扇形统计图表示各部分所占百分比的理解错误。根据表中数据可知,张强获 30 票,王梅获 15 票,刘云获 6 票,赵青青获 9 票,由此分别算出每人获得票数占总人数的百分比为 50%、25%、10%、15%,也就是说张强得票结果占扇形统计图的一半,王梅占扇形统计图的 $\frac{1}{4}$,刘云占扇形统计图的 $\frac{1}{10}$,剩下的是赵青青所占百分比,结合这些信息对比三个选项的统计图,可发现 A 正确显示了得票结果。

正确解答:A

(对应训练参见学生用书第七单元测试第三题第 3 小题内容)

考前梳理 第八单元 数学广角——数与形

复习驿站

1. 数形结合

数形结合是一种非常重要的数学思想,把数与形结合起来解决问题,可使复杂的问题变得更简单,使抽象的问题变得更直观。

2. 数与形

(1) 等差数列 1, 3, 5, ... 之和与奇数个数的关系。

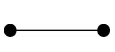

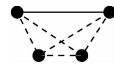
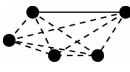
从 1 开始,连续几个奇数的和等于奇数个数的平方。例如: $1 + 3 + 5 = 3^2$ 。

(2) 等比数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 之和: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$ 。

发现加数的规律:第一个加数是 $\frac{1}{2}$,后面每个加数是前一个加数的 $\frac{1}{2}$;发现和的规律:和为 1 减去最后一个加数,随着加数越来越多,和越来越接近于 1。

典型例题分析

例 6 个点最多可以连成多少条线段? 8 个点呢?

点数					...
增加条数		2	3	4	...
总条数	1	3	6	10	...

分析:观察表格可以看出:3 个点连成线段的条数: $1 + 2 = 3$ (条);4 个点连成线段的条数: $1 + 2 + 3 = 6$ (条);5 个点连成线段的条数: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (条);发现规律是总线段数就是从 1 依次连加到点数减 1 的那个数的自然数列之和。所以 6 个点可以连成的线段数是 1 加 2 一直加到 5 的和,而 8 个点可以连成的线段数是 1 加 2 一直加到 7 的和。

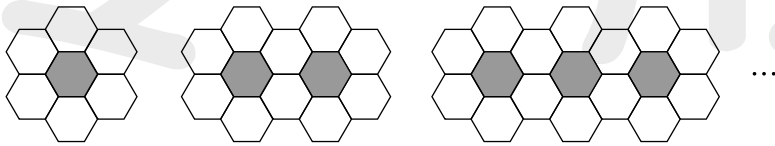
解答: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ (条)

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ (条)

答:6 个点最多可以连成 15 条线段;8 个点最多可以连成 28 条线段。

容错展板

错例 用灰、白两种颜色的正六边形地砖按如图的规律,拼成若干个图案,则第 5 个图案中白色地砖有()块,第 a 个图案中白色地砖有()块。第()个图案中白色地砖有 42 块。



错误解答: $20 \quad 4a \quad 11$

错解分析:本题归纳推理错误。通过观察可知,除第一个图案以外,每增加一块灰色地砖,相应的白色地砖就增加 4 块,即第一个图案中有 $6 = 4 + 2$ 块白色地砖,第二个图案中有 $6 + 4 = 4 + 4 + 2$ 块白色地砖,第三个图案中有 $6 + 4 + 4 = 4 + 4 + 4 + 2$ 块白色地砖,依次类推可得出第 a 个图案中有 $(4a + 2)$ 块白色地砖,因此第 5 个图案中白色地砖有 $5 \times 4 + 2 = 22$ (块),最后根据 $4a + 2 = 42$ 算出第 10 个图案中白色地砖有 42 块。

正确解答: $22 \quad 4a + 2 \quad 10$

(对应训练参见学生用书第八单元测试第一题第 4 小题内容)